

Vectores Autoregresivos Estructurales

Macroeconometría Aplicada

Juan Guerra-Salas

Pontificia Universidad Católica de Chile

Segundo Semestre 2020

- ▶ Sacaré contenido de **Enders (2015)**, **cáp. 5**, p. **285-317**.
- ▶ En el tema anterior, estudiamos modelos VAR simples y cómo se usan para hacer pronósticos.
- ▶ Modelos multivariados como VARs describen la evolución conjunta de múltiples series de tiempo.
- ▶ Capturan la interdependencia entre variables, por lo que son una buena herramienta para hacer análisis de **causalidad**: ¿cuál es el **efecto** de cambios en una variable sobre otra(s) variable(s)?

- 1 Residuos en VARs en forma reducida.
- 2 Efectos contemporáneos: VARs estructurales.
- 3 ¿Cómo hacer análisis estructural con VARs?
- 4 Expresión de VARs estructurales como VARs en forma reducida.
- 5 Residuos de forma reducida vs shocks estructurales.
- 6 Identificación: imponer estructura para recuperar parámetros y shocks estructurales.
- 7 Funciones impulso-respuesta.
- 8 Descomposición de varianza.
- 9 Aplicación: política monetaria en los EEUU.

Residuos en VARs en forma reducida

- ▶ Estudiaron “VARs en forma reducida”. Cada variable se expresa como función de rezagos de sí misma y de otras variables.
- ▶ VARs en forma reducida: buenas herramientas para hacer pronósticos.
- ▶ Pero no son útiles para estudiar causalidad, porque los residuos de VARs en forma reducida usualmente están correlacionados.
- ▶ Los residuos en forma reducida usualmente ocurren al mismo tiempo.
- ▶ Objetivo de VARs estructurales es identificar shocks no correlacionados (o shocks “puros”).
- ▶ VARs estructurales se usan para estudiar relaciones causales entre variables.
- ▶ ¿Qué efecto tiene un cambio (shock) en una variable del sistema sobre las otras variables, manteniendo todo lo demás constante?

Residuos en VARs en forma reducida: ejemplo

- ▶ Consideren un VAR con inflación y tasa de política monetaria (TPM).
- ▶ Para estudiar el efecto causal de la TPM sobre la inflación, se necesita identificar shocks puros (no correlacionados) a la TPM.
- ▶ Shock puro a la TPM = cambio en la TPM con todo lo demás constante.
- ▶ Si residuos de TPM e inflación están correlacionados, como es probable en un VAR en forma reducida, podrían reflejar otro shock subyacente, como un shock de demanda que empuja a la TPM y a la inflación en la misma dirección (este shock generaría correlación positiva en los residuos).
- ▶ Si residuos de TPM están correlacionados con otros, no sirven para analizar efecto causal de TPM sobre inflación.

Efectos contemporáneos: VARs estructurales

- ▶ En VARs en forma reducida, las variables solo responden a rezagos de sí mismas y otras variables.
- ▶ No necesariamente es el caso. Ej: VAR con TPM e inflación. En frecuencia trimestral, TPM puede responder a cambios en la inflación de manera contemporánea.
- ▶ Un **VAR estructural** (VAR en forma primitiva) contiene efectos contemporáneos y perturbaciones no correlacionadas, es decir, innovaciones o shocks puros. Consideren el siguiente VAR(1):

$$\begin{aligned}y_t &= -b_{yz}z_t + \gamma_{yy}y_{t-1} + \gamma_{yz}z_{t-1} + u_{yt} \\z_t &= -b_{zy}y_t + \gamma_{zy}y_{t-1} + \gamma_{zz}z_{t-1} + u_{zt}\end{aligned}$$

- ▶ $Cov(u_{yt}, u_{zt}) = 0$.
- ▶ A diferencia de un VAR en forma reducida, este sistema no puede estimarse por MCO (OLS). Sufriría de sesgo de ecuaciones simultáneas: regresores y errores estarían correlacionados.
- ▶ Shock a u_{yt} afectaría a z_t a través de su efecto en y_t . u_{yt} , z_t estarían correlacionados, lo que violaría el supuesto básico de OLS.

Efectos contemporáneos: VARs estructurales (cont.)

- ▶ ¿Por qué no están correlacionados los shocks en el VAR estructural de la lámina anterior?
- ▶ Porque la presencia de regresores contemporáneos captura la relación contemporánea entre las variables.
- ▶ En el ejemplo de un VAR con la TPM e inflación, la ecuación para la inflación π_t tendría a la TPM R_t como un regresor.
 - El coeficiente de R_t capturaría el co-movimiento contemporáneo entre π_t, R_t .
 - Este co-movimiento incluiría, por ejemplo, el rol de shocks de demanda que generan movimientos de π y R en la misma dirección.
 - Por lo tanto, el shock a π es el cambio inesperado en la inflación, “controlando por” el co-movimiento contemporáneo. \Rightarrow Es un shock puro.

¿Cómo hacer análisis estructural con VARs?

- ▶ El VAR estructural no puede estimarse directamente.
- ▶ Pero puede expresarse como un VAR en forma reducida.
- ▶ El procedimiento consiste, entonces, en:
 - 1 Estimar el VAR en forma reducida (OLS, por ejemplo), y
 - 2 “Imponer estructura” para recuperar los parámetros y los shocks del VAR estructural. Usaremos estos parámetros para pensar en el sistema en términos de causalidad: causas y efectos.

Expresión de VARs estructurales como VARs en forma reducida

- ▶ El VAR estructural en forma de matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{yz} \\ b_{zy} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zy} & \gamma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{yt} \\ u_{zt} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B}\mathbf{x}_t = \mathbf{\Gamma}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

- ▶ $E[\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t'] = \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix}$.

- ▶ Al premultiplicar por \mathbf{B}^{-1} se obtiene el VAR en forma reducida:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{x}_t = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{u}_t,$$
$$\mathbf{x}_t = \mathbf{\Phi}\mathbf{x}_{t-1} + \epsilon_t, \quad \mathbf{\Phi} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{\Gamma}; \quad \epsilon_t = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{u}_t.$$

- ▶ El sistema en forma reducida puede escribirse como

$$\begin{array}{l} y_t = \phi_{yy}y_{t-1} + \phi_{yz}z_{t-1} + \delta_t \\ z_t = \phi_{zy}y_{t-1} + \phi_{zz}z_{t-1} + \nu_t, \end{array}$$

- ▶ donde $\epsilon_t = [\delta_t \ \nu_t]'$.

Residuos de forma reducida vs shocks estructurales

- ▶ Tenemos $\epsilon_t = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{u}_t$.
- ▶ Es decir, los residuos de forma reducida ϵ_t son una combinación de los shocks estructurales.
- ▶ Al calcular la inversa de \mathbf{B} y multiplicarla por \mathbf{u}_t se obtiene [detalles en [Apéndice A](#)]:

$$\begin{bmatrix} \delta_t \\ \nu_t \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - b_{yz}b_{zy}} \begin{bmatrix} 1 & -b_{yz} \\ -b_{zy} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{yt} \\ u_{zt} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \delta_t &= \frac{(u_{yt} - b_{yz}u_{zt})}{(1 - b_{yz}b_{zy})} \\ \nu_t &= \frac{(u_{zt} - b_{zy}u_{yt})}{(1 - b_{yz}b_{zy})} \end{aligned}$$

- ▶ Podemos ver que si usáramos residuos en forma reducida para hacer análisis de causalidad, estaríamos mezclando varios shocks subyacentes.

Identificación: imponer estructura para recuperar parámetros y shocks estructurales (1/5)

- ▶ Estimación del VAR en forma reducida ofrece cuatro parámetros (ϕ_{yy} , ϕ_{yz} , ϕ_{zy} , ϕ_{zz}).
- ▶ Adicionalmente, a partir de los residuos estimados $[\delta_t \ \nu_t]'$, podemos calcular los tres elementos de la matriz de varianza-covarianza: $var(\delta_t)$, $var(\nu_t)$, $cov(\delta_t, \nu_t)$.
- ▶ En total, la estimación del VAR en forma reducida ofrece siete parámetros.
- ▶ El VAR estructural tiene ocho parámetros:
 - Los dos elementos de \mathbf{B} : b_{yz} , b_{zy} .
 - Los cuatro elementos de $\mathbf{\Gamma}$: γ_{yy} , γ_{yz} , γ_{zy} , γ_{zz} .
 - La varianza de los shocks estructurales: $var(u_{yt})$, $var(u_{zt})$. (Recuerden que la covarianza de los shocks estructurales es cero por definición.)
- ▶ Entonces, el sistema estructural está **subidentificado**.

Identificación (2/5)

- ▶ Necesitamos (al menos) una restricción adicional para identificar el VAR estructural.
- ▶ Una práctica común es imponer una **estructura recursiva** en el VAR estructural:
 - Supongamos que queremos imponer que $b_{yz} = 0$ en el sistema estructural.
 - Es decir, que z_t no afecta a y_t de manera contemporánea, sino solo con un rezago. y_t sí afecta a z_t de manera contemporánea.
 - Esta restricción puede motivarse por teoría o intuición.
 - Ej: VAR con TPM e inflación. Sería razonable suponer que TPM afecta a inflación con rezago debido a rigidez de precios.
 - Esta restricción reduce el número de parámetros en el VAR estructural a siete, el mismo número de parámetros que ofrece la estimación del VAR en forma reducida. El sistema está identificado. Veremos que **podemos recuperar todos los parámetros estructurales**, y por tanto, los shocks estructurales.

Identificación (3/5)

- ▶ Con la restricción $b_{yz} = 0$, los residuos son:

$$\delta_t = u_{yt}$$

$$\nu_t = u_{zt} - b_{zy} u_{yt}$$

- ▶ Las varianzas y co-varianza de los residuos (detalles en [apéndice B](#)):

$$\text{var}(\delta_t) = \sigma_y^2 \quad (1)$$

$$\text{var}(\nu_t) = \sigma_z^2 + b_{zy}^2 \sigma_y^2 \quad (2)$$

$$\text{cov}(\delta_t, \nu_t) = -b_{zy} \sigma_y^2 \quad (3)$$

- ▶ Este es un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:

- De la primera ecuación tenemos $\sigma_y^2 = \text{var}(\delta_t)$.
- De la tercera ecuación, $b_{zy} = -\text{cov}(\delta_t, \nu_t) / \sigma_y^2$.
- De la segunda ecuación, $\sigma_z^2 = \text{var}(\nu_t) - b_{zy}^2 \sigma_y^2$.

Identificación (4/5)

- ▶ Hemos encontrado tres de los parámetros estructurales. Nos quedan cuatro.
- ▶ El VAR estructural con la restricción $b_{yz} = 0$ impuesta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b_{zy} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zy} & \gamma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{yt} \\ u_{zt} \end{bmatrix}$$

- ▶ Al premultiplicar por \mathbf{B}^{-1} : [detalles de la inversa en [apéndice C](#)]

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -b_{zy} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zy} & \gamma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -b_{zy} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{yt} \\ u_{zt} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zy} - b_{zy}\gamma_{yy} & \gamma_{zz} - b_{zy}\gamma_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{yt} \\ u_{zt} - b_{zy}u_{yt} \end{bmatrix}$$

- ▶ Recuerden que el VAR en forma reducida estimado es:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{yy} & \phi_{yz} \\ \phi_{zy} & \phi_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_t \\ \nu_t \end{bmatrix}$$

- ▶ Entonces, al igualar coeficientes, tiene que ser que:

- $\gamma_{yy} = \phi_{yy}$
- $\gamma_{yz} = \phi_{yz}$
- $\gamma_{zy} - b_{zy}\gamma_{yy} = \phi_{zy}$
- $\gamma_{zz} - b_{zy}\gamma_{yz} = \phi_{zz}$

- ▶ Hemos recuperado los siete parámetros del modelo estructural.
- ▶ También podríamos construir la secuencia de shocks estructurales (sabemos cómo se relacionan a los residuos).
- ▶ Identificación mediante estructura recursiva es equivalente a una **descomposición de Cholesky** de la matriz de varianza-covarianza de los residuos en forma reducida.

Funciones impulso-respuesta (1/5)

- ▶ Con los parámetros estructurales y shocks, podemos hacer análisis interesantes como impulso-respuestas y descomposiciones de varianza, y darles una interpretación causal.
- ▶ Las funciones impulso-respuesta describen el efecto de un shock de una vez a una variable sobre la(s) otra(s).
- ▶ Noten que necesitamos shocks puros que no estén correlacionados. En nuestra identificación por descomposición de Cholesky recuperamos los parámetros asociados al VAR estructural, en el que los shocks no están correlacionados.
- ▶ Es útil notar que la función impulso-respuesta es idéntica a la representación media móvil vectorial del VAR: VMA (vector moving average). (Recuerden que un VAR(1) puede representarse como un VMA(∞).)

Funciones impulso-respuesta (2/5)

- ▶ El VAR(1) en forma reducida que estamos estudiando es:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{yy} & \phi_{yz} \\ \phi_{zy} & \phi_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_t \\ \nu_t \end{bmatrix}$$

- ▶ Tiene la siguiente representación VMA (si el VAR es estable; la condición de estabilidad es análoga a la de un proceso AR(1) [derivación en el [apéndice D](#)]):

$$\mathbf{x}_t = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{\Phi}^i \epsilon_{t-i}$$

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \phi_{yy} & \phi_{yz} \\ \phi_{zy} & \phi_{zz} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} \delta_{t-i} \\ \nu_{t-i} \end{bmatrix}$$

Funciones impulso-respuesta (3/5)

- ▶ Recuerden que el vector de residuos en forma reducida es una función de los shocks estructurales. Con la restricción de Cholesky que impusimos:

$$\begin{bmatrix} \delta_t \\ \nu_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -b_{zy} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{yt} \\ u_{zt} \end{bmatrix}, \text{ tal que}$$

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \phi_{yy} & \phi_{yz} \\ \phi_{zy} & \phi_{zz} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -b_{zy} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{yt-i} \\ u_{zt-i} \end{bmatrix}$$

- ▶ Simplifiquemos la notación definiendo Θ_i , con elementos $\theta_{jk}(i)$:

$$\Theta_i = \begin{bmatrix} \phi_{yy} & \phi_{yz} \\ \phi_{zy} & \phi_{zz} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -b_{zy} & 1 \end{bmatrix}, \text{ tal que}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \theta_{11}(i) & \theta_{12}(i) \\ \theta_{21}(i) & \theta_{22}(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{yt-i} \\ u_{zt-i} \end{bmatrix}}$$

Funciones impulso-respuesta (4/5)

$$\mathbf{x}_t = \sum_{i=0}^{\infty} \Theta_i \mathbf{u}_{t-i}$$

- Esta expresión puede usarse para obtener el efecto de cada shock en las variables del sistema:
- Supongamos que queremos analizar el efecto de un shock unitario de una sola vez.
 - El shock ocurre en el periodo t ; es cero en cualquier otro periodo.
 - Para obtener el efecto de \mathbf{u}_t en la evolución de \mathbf{x} (queremos saber $\partial \mathbf{x}_{t+i} / \partial \mathbf{u}_t$), se adelanta la representación VMA:

$$\mathbf{x}_t = \sum_{i=0}^{\infty} \Theta_i \mathbf{u}_{t-i} = \Theta_0 \mathbf{u}_t + \cancel{\Theta_1 \mathbf{u}_{t-1}} + \overset{0}{\dots} = \Theta_0 \mathbf{u}_t$$

$$\mathbf{x}_{t+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \Theta_i \mathbf{u}_{t+1-i} = \cancel{\Theta_0 \mathbf{u}_{t+1}} + \overset{0}{\Theta_1 \mathbf{u}_t} + \dots = \Theta_1 \mathbf{u}_t$$

$$\mathbf{x}_{t+2} = \sum_{i=0}^{\infty} \Theta_i \mathbf{u}_{t+2-i} = \cancel{\Theta_0 \mathbf{u}_{t+2}} + \overset{0}{\cancel{\Theta_1 \mathbf{u}_{t+1}}} + \overset{0}{\Theta_2 \mathbf{u}_t} + \dots = \Theta_2 \mathbf{u}_t$$

Funciones impulso-respuesta (5/5)

- ▶ Entonces, las Θ_i determinan el impacto de \mathbf{u}_t sobre \mathbf{x} : $\frac{\partial \mathbf{x}_{t+i}}{\partial \mathbf{u}_t} = \Theta_i$
- ▶ Las funciones impulso-respuesta son gráficos de los elementos de Θ_i a lo largo de i :
 - Al graficar $\theta_{11}(i)$ a lo largo de i obtenemos el impacto de un shock unitario a u_{yt} sobre y .
 - Al graficar $\theta_{12}(i)$ a lo largo de i obtenemos el impacto de un shock unitario a u_{zt} sobre y .
 - Al graficar $\theta_{21}(i)$ a lo largo de i obtenemos el impacto de un shock unitario a u_{yt} sobre z .
 - Al graficar $\theta_{22}(i)$ a lo largo de i obtenemos el impacto de un shock unitario a u_{zt} sobre z .
- ▶ Noten que al trabajar con un VAR estable, los efectos de shocks de una sola vez eventualmente se desvanecen, es decir, las variables regresan a cero (o a su media).

Descomposición de varianza (1/5)

- ▶ La descomposición de varianza del error de pronóstico (FEVD, por forecast error variance decomposition) es otra herramienta que se usa para aprender sobre la relación estructural entre variables.
- ▶ Es la proporción del movimiento de cada variable del sistema que se atribuye a cada uno de los shocks estructurales.
- ▶ Recuerden que la forma reducida del VAR es $\mathbf{x}_t = \Phi \mathbf{x}_{t-1} + \epsilon_t$.
- ▶ Sus pronósticos son $E_t(\mathbf{x}_{t+k}) = \Phi^k \mathbf{x}_t$.
- ▶ Los errores de pronóstico son:

$$\mathbf{x}_{t+1} - E_t(\mathbf{x}_{t+1}) = \Phi \mathbf{x}_t + \epsilon_{t+1} - \Phi \mathbf{x}_t = \epsilon_{t+1}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{t+2} - E_t(\mathbf{x}_{t+2}) &= \Phi \mathbf{x}_{t+1} + \epsilon_{t+2} - \Phi^2 \mathbf{x}_t \\ &= \Phi(\Phi \mathbf{x}_t + \epsilon_{t+1}) + \epsilon_{t+2} - \Phi^2 \mathbf{x}_t \\ &= \Phi^2 \mathbf{x}_t + \Phi \epsilon_{t+1} + \epsilon_{t+2} - \Phi^2 \mathbf{x}_t \\ &= \Phi \epsilon_{t+1} + \epsilon_{t+2}\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_{t+k} - E_t(\mathbf{x}_{t+k}) = \epsilon_{t+k} + \Phi \epsilon_{t+k-1} + \Phi^2 \epsilon_{t+k-2} + \dots + \Phi^{k-1} \epsilon_{t+1}$$

- ▶ Errores son producto de realizaciones impredecibles del proceso ruido blanco.

Descomposición de varianza (2/5)

- Ahora consideren el error de pronóstico en términos de la forma VMA del modelo estructural: $\mathbf{x}_t = \sum_{i=0}^{\infty} \Theta_i \mathbf{u}_{t-i}$, donde

$$\Theta_i \equiv \begin{bmatrix} \theta_{11}(i) & \theta_{12}(i) \\ \theta_{21}(i) & \theta_{22}(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{yy} & \phi_{yz} \\ \phi_{zy} & \phi_{zz} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -b_{zy} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_t = \begin{bmatrix} u_{yt} \\ u_{zt} \end{bmatrix}$$

- El pronóstico y error de pronóstico un periodo hacia adelante son:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \Theta_i \mathbf{u}_{t+1-i}$$

$$\begin{aligned} E_t(\mathbf{x}_{t+1}) &= E_t(\Theta_0 \mathbf{u}_{t+1}) + E_t(\Theta_1 \mathbf{u}_t) + E_t(\Theta_2 \mathbf{u}_{t-1}) + \dots \\ &= \Theta_1 \mathbf{u}_t + \Theta_2 \mathbf{u}_{t-1} + \dots \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i \mathbf{u}_{t+1-i}$$

$$\mathbf{x}_{t+1} - E_t(\mathbf{x}_{t+1}) = \sum_{i=0}^{\infty} \Theta_i \mathbf{u}_{t+1-i} - \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i \mathbf{u}_{t+1-i} = \Theta_0 \mathbf{u}_{t+1}$$

Descomposición de varianza (3/5)

- ▶ El pronóstico y error de pronóstico k periodos adelante son:

$$\mathbf{x}_{t+k} = \sum_{i=0}^{\infty} \Theta_i \mathbf{u}_{t+k-i}$$

$$\begin{aligned} E_t(\mathbf{x}_{t+k}) &= \cancel{E_t(\Theta_0 \mathbf{u}_{t+k})} + \cancel{E_t(\Theta_1 \mathbf{u}_{t+k-1})} + \dots \\ &\quad + E_t(\Theta_k \mathbf{u}_t) + E_t(\Theta_{k+1} \mathbf{u}_{t-1}) + \dots \\ &= \sum_{i=k}^{\infty} \Theta_i \mathbf{u}_{t+k-i} \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_{t+k} - E_t(\mathbf{x}_{t+k}) = \sum_{i=0}^{\infty} \Theta_i \mathbf{u}_{t+k-i} - \sum_{i=k}^{\infty} \Theta_i \mathbf{u}_{t+k-i} = \sum_{i=0}^{k-1} \Theta_i \mathbf{u}_{t+k-i}$$

- ▶ El error de pronóstico k periodos adelante se produce por realizaciones de shocks futuros: desde \mathbf{u}_{t+1} (cuando $i = k - 1$), hasta \mathbf{u}_{t+k} (cuando $i = 0$).

Descomposición de varianza (4/5)

- ▶ Consideren el error de pronóstico de y_t , la primera variable endógena del vector \mathbf{x}_t :

$$y_{t+k} - E_t(y_{t+k}) = \theta_{11}(0)u_{yt+k} + \theta_{11}(1)u_{yt+k-1} + \cdots + \theta_{11}(k-1)u_{yt+1} \\ + \theta_{12}(0)u_{zt+k} + \theta_{12}(1)u_{zt+k-1} + \cdots + \theta_{12}(k-1)u_{zt+1}$$

- ▶ Ahora tomemos la varianza de este error, y llamémosla $\sigma_y(k)^2$:

$$\begin{aligned} \sigma_y(k)^2 &= \text{var}_t[y_{t+k} - E_t(y_{t+k})] \\ &= \theta_{11}(0)^2\sigma_y^2 + \theta_{11}(1)^2\sigma_y^2 + \cdots + \theta_{11}(k-1)^2\sigma_y^2 \\ &\quad + \theta_{12}(0)^2\sigma_z^2 + \theta_{12}(1)^2\sigma_z^2 + \cdots + \theta_{12}(k-1)^2\sigma_z^2 \\ &= \sigma_y^2[\theta_{11}(0)^2 + \theta_{11}(1)^2 + \cdots + \theta_{11}(k-1)^2] \\ &\quad + \sigma_z^2[\theta_{12}(0)^2 + \theta_{12}(1)^2 + \cdots + \theta_{12}(k-1)^2] \end{aligned}$$

- ▶ Esta varianza solo depende de parámetros, y tiene dos partes: una asociada a la varianza del shock de la misma variable σ_y^2 , y otra a la varianza del shock de z_t , σ_z^2 .

Descomposición de varianza (5/5)

- ▶ Entonces $\sigma_y(k)^2$ puede descomponerse en las proporciones asociadas a cada shock. Las proporciones asociadas a los shocks en las secuencias $\{u_{yt}\}$, $\{u_{zt}\}$ son:

$$\frac{\sigma_y^2[\theta_{11}(0)^2 + \theta_{11}(1)^2 + \cdots + \theta_{11}(k-1)^2]}{\sigma_y(k)^2}$$
$$\frac{\sigma_z^2[\theta_{12}(0)^2 + \theta_{12}(1)^2 + \cdots + \theta_{12}(k-1)^2]}{\sigma_y(k)^2}$$

- ▶ En investigación aplicada, es común reportar la FEVD a distintos horizontes.
- ▶ Mientras el horizonte aumenta, la FEVD converge. Cuando tiende a infinito, se obtiene la contribución de cada shock a la varianza de cada serie. (Cochrane, pp. 54).

- ▶ **Stock y Watson (2001)** evalúan la utilidad de los modelos VAR en las siguientes dimensiones:
 - Descripción de datos.
 - Pronósticos.
 - Inferencia estructural.
 - Análisis de política.
- ▶ Ilustran el desempeño de VARs con una aplicación al análisis de la política monetaria de los EEUU.
- ▶ Más allá de modelos VAR, es una excelente revisión del trabajo de macroeconomistas aplicados.

Un VAR para análisis de política monetaria (1/2)

- ▶ Consideren el siguiente VAR en forma reducida:

$$\begin{bmatrix} \pi_t \\ u_t \\ R_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\pi \\ c_u \\ c_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{t-1} \\ u_{t-1} \\ R_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{\pi t} \\ \varepsilon_{ut} \\ \varepsilon_{Rt} \end{bmatrix},$$

- ▶ donde π_t es la tasa de inflación, u_t es la tasa de desempleo, y R_t es la tasa de interés de los fondos federales.
- ▶ La política monetaria se implementa principalmente a través de la tasa *fed funds*. Tiene por objetivo estabilizar la inflación y contribuir al pleno empleo.
- ▶ Para estudiar los efectos de un shock de política monetaria (a la tasa *fed funds*), se debe identificar shocks estructurales.

Un VAR para análisis de política monetaria (2/2)

- ▶ Consideren los siguientes supuestos de identificación para el VAR de política monetaria (la frecuencia de los datos es trimestral):
 - La Fed puede observar y responder a π , u de manera contemporánea.
 - Rigidez de precios: π afecta a u de manera contemporánea, pero u ni R afectan a π de manera contemporánea.
- ▶ Con estos supuestos, el VAR estructural toma la siguiente forma:

$$\pi_t = c_\pi + \phi_{11}\pi_{t-1} + \phi_{12}u_{t-1} + \phi_{13}R_{t-1} + v_{\pi t}$$

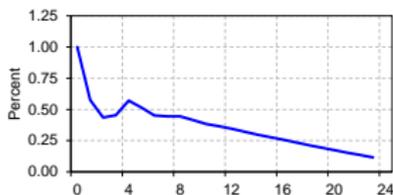
$$u_t = c_u + b_{21}\pi_t + \phi_{21}\pi_{t-1} + \phi_{22}u_{t-1} + \phi_{23}R_{t-1} + v_{ut}$$

$$R_t = c_R + b_{31}\pi_t + b_{32}u_t + \phi_{31}\pi_{t-1} + \phi_{32}u_{t-1} + \phi_{33}R_{t-1} + v_{Rt}$$

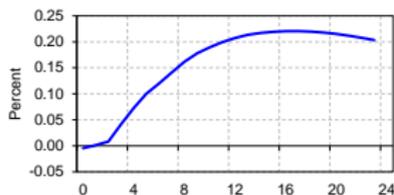
- ▶ A diferencia de $\varepsilon_{\pi t}$, ε_{ut} , ε_{Rt} , que pueden estar correlacionados, $v_{\pi t}$, v_{ut} , v_{Rt} no están correlacionados.
- ▶ La estructura proviene de supuestos teóricos suaves que permiten identificar shocks de política monetaria.

Efectos dinámicos de un shock de política monetaria

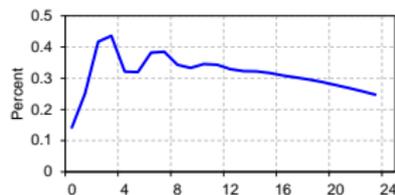
Inflation Shock to Inflation



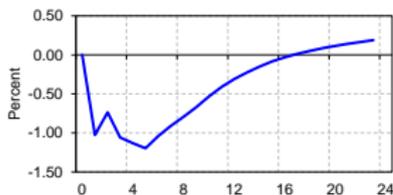
Inflation Shock to Unemployment



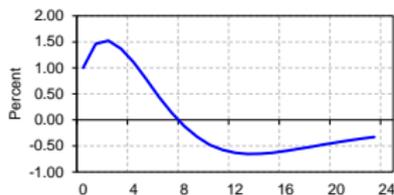
Inflation Shock to Int. Rate



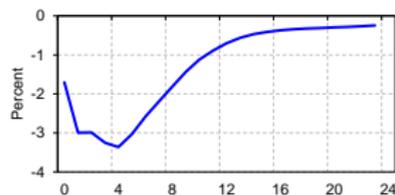
Unemployment Shock to Inflation



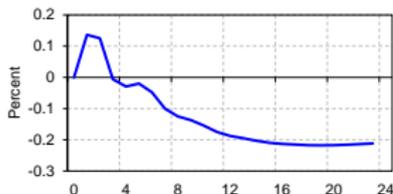
Unemployment Shock to Unemp.



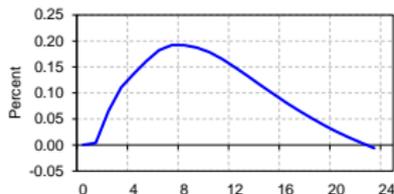
Unemp. Shock to Int. Rate



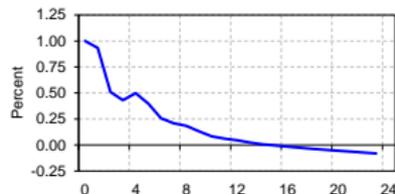
Int. Rate Shock to Inflation



Int. Rate Shock to Unemp.



Int. Rate Shock to Int. Rate

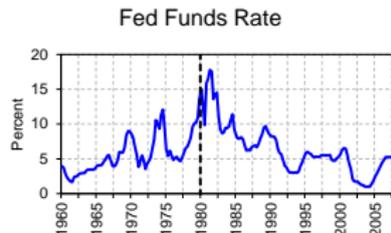
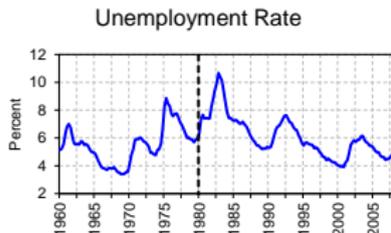


Descomposición de varianza

F'cast Horizon	F'cast St. Err.	Var. Decomp. (Per. Pts.)		
		π	u	R
<i>Variance Decomposition of π</i>				
1	1.03	100	0	0
4	1.42	92	7	1
8	1.82	87	12	1
12	2.04	86	12	2
<i>Variance Decomposition of u</i>				
1	0.23	0	100	0
4	0.64	0	97	2
8	0.80	8	79	12
12	0.95	22	61	18
<i>Variance Decomposition of R</i>				
1	0.89	3	20	77
4	1.90	13	48	39
8	2.49	16	56	28
12	2.67	21	54	25

Extensión: reacción de la política monetaria a la inflación, pre- y post-Volcker (1/3)

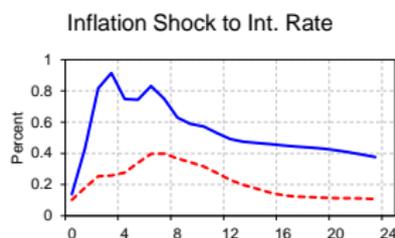
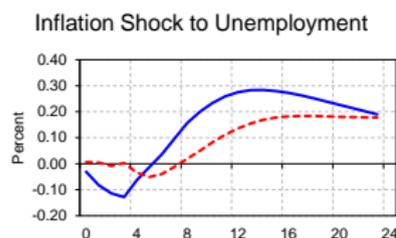
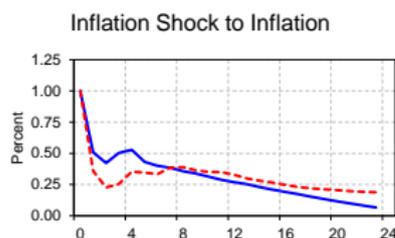
- ▶ Hay evidencia de que el comportamiento de la Fed cambió sustancialmente después de que Paul Volcker asumió como *chairman* en 1979.
- ▶ En la era Volcker-Greenspan, la reacción a la inflación es más fuerte que en la era pre-Volcker (véase, por ej., Clarida, Gali and Gertler, QJE, 2000).



Extensión: reacción de la política monetaria a la inflación, pre- y post-Volcker (2/3)

- ▶ La ecuación de la tasa *fed funds* en el VAR se puede interpretar como una regla de política monetaria que captura la respuesta de la tasa a la inflación y al desempleo.
- ▶ Estimo el VAR para dos sub-muestras 1960:T1–1979:T4, and 1980:T1–2007:T4, y analizo la respuesta de la tasa *fed funds* a un shock inflacionario.

Extensión: reacción de la política monetaria a la inflación, pre- y post-Volcker (3/3)



Red: Pre-Volcker. Blue: Post-Volcker

- ▶ En el periodo pre-Volcker, la tasa de interés es mucho menos sensible a un shock inflacionario.
- ▶ La Fed tolera una inflación persistentemente sobre su media, y el desempleo sube moderadamente.
- ▶ En la era Volcker-Greenspan, la Fed reacciona agresivamente al shock inflacionario, lo que genera un mayor aumento del desempleo.

Appendix A (1/2)

- ▶ Derivation of the inverse of \mathbf{B}

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & b_{yz} \\ b_{zy} & 1 \end{bmatrix}$$

- ▶ The inverse is one over the determinant, times the transpose of the matrix of cofactors:

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{B}|} \mathbf{C}'_{\mathbf{B}}$$

$$|\mathbf{B}| = 1 - b_{yz}b_{zy}$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{B}} = M_{\mathbf{B}} \times \begin{cases} 1 & \text{if } i + j = \text{even} \\ -1 & \text{if } i + j = \text{odd} \end{cases}$$

where $M_{\mathbf{B}}$ is the matrix of minors and i, j are the row and column number of each element.

$$M_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & b_{zy} \\ b_{yz} & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -b_{zy} \\ -b_{yz} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{1 - b_{yz}b_{zy}} \begin{bmatrix} 1 & -b_{zy} \\ -b_{yz} & 1 \end{bmatrix}$$

Appendix A (2/2)

$$\begin{aligned}\epsilon_t = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{u}_t &= \frac{1}{1 - b_{yz}b_{zy}} \begin{bmatrix} 1 & -b_{yz} \\ -b_{zy} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{yt} \\ u_{zt} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1 - b_{yz}b_{zy}} \begin{bmatrix} u_{yt} - b_{yz}u_{zt} \\ u_{zt} - b_{zy}u_{yt} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Then:

$$\begin{aligned}\delta_t &= \frac{(u_{yt} - b_{yz}u_{zt})}{(1 - b_{yz}b_{zy})} \\ \nu_t &= \frac{(u_{zt} - b_{zy}u_{yt})}{(1 - b_{yz}b_{zy})}\end{aligned}$$

Appendix B

- ▶ The vector of structural shocks $[u_{yt} \ u_{zt}]'$ has variance-covariance matrix $\begin{bmatrix} \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix}$.
- ▶ The reduced-form residuals are a combination of the structural shocks:

$$\delta_t = u_{yt}$$

$$\nu_t = u_{zt} - b_{zy}u_{yt}$$

$$\text{var}(\delta_t) = \sigma_y^2$$

$$\begin{aligned} \text{var}(\nu_t) &= E[(\nu_t - E(\nu_t))(\nu_t - E(\nu_t))] \\ &= E[\nu_t \nu_t] = E[(u_{zt} - b_{zy}u_{yt})(u_{zt} - b_{zy}u_{yt})] \\ &= E[u_{zt}^2 + b_{zy}^2 u_{yt}^2] \\ &= \sigma_z^2 + b_{zy}^2 \sigma_y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(\delta_t, \nu_t) &= E[(\delta_t - E(\delta_t))(\nu_t - E(\nu_t))] \\ &= E[\delta_t \nu_t] = E[u_{yt}(u_{zt} - b_{zy}u_{yt})] \\ &= E[-b_{zy}u_{yt}^2] = -b_{zy}\sigma_y^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b_{zy} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{B}|} \mathbf{C}'_{\mathbf{B}}$$

$$|\mathbf{B}| = 1$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{B}} = M_{\mathbf{B}} \times \begin{cases} 1 & \text{if } i + j = \text{even} \\ -1 & \text{if } i + j = \text{odd} \end{cases}$$

$$M_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & b_{zy} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -b_{zy} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -b_{zy} & 1 \end{bmatrix}$$

Appendix D

- ▶ The VAR(1) $\mathbf{x}_t = \Phi \mathbf{x}_{t-1} + \epsilon_t$ has a VMA(∞) representation if it's stable. Stability requires that the eigenvalues of Φ be smaller than one in modulus (modulus of real number is its absolute value; modulus of imaginary number $a + bi$ is $\sqrt{a^2 + b^2}$; an eigenvalue λ of a matrix is also known as its characteristic value, and is the solution to the matrix's characteristic equation $|\Phi - \lambda \mathbf{I}| = 0$).

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_t &= \Phi \mathbf{x}_{t-1} + \epsilon_t \\ &= \Phi(\Phi \mathbf{x}_{t-2} + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t \\ &= \Phi^2 \mathbf{x}_{t-2} + \Phi \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\ &= \Phi^k \mathbf{x}_{t-k} + \Phi^{k-1} \epsilon_{t-k+1} + \dots + \Phi \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \Phi^i \epsilon_{t-i}, \text{ since } \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi^k \mathbf{x}_{t-k} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

if the VAR(1) is stable.