Modelos de Vectores Autoregresivos (VAR)

Macroeconometría Aplicada

Juan Guerra-Salas

Pontificia Universidad Católica de Chile

Segundo Semestre 2020

Introducción

- Sacaré contenido de **Cochrane, cáp. 5**.
- Aprendieron sobre modelos ARMA univariados; modelos que analizan la evolución de una serie de tiempo.
- Los modelos multivariados son útiles para describir la evolución conjunta de múltiples series de tiempo.
- Los modelos multivariados permiten capturar interdependencias entre variables.
- Por ejemplo, es probable que el PIB, la inflación y la tasa de política monetaria estén relacionadas (la teoría soporta esta idea).
- Hablamos de "vectores autoregresivos" (VARs), porque es poco común estimar términos de media móvil. Los procesos autoregresivos son más fáciles de estimar (supuestos de MCO aplican).

Contenido

Notación

- Los símbolos con negrita indican vectores y matrices.
- Consideren la siguiente serie multivariada (bivariada):

$$\mathbf{x_t} = \begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix}.$$

- El ingrediente principal de nuestros modelos será el proceso ruido blanco multivariado $\epsilon_{\mathbf{t}} \sim \text{iid } N(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$:

$$\epsilon_{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \delta_t \\ \nu_t \end{bmatrix}; \quad E(\epsilon_{\mathbf{t}}) = \mathbf{0}; \quad E(\epsilon_{\mathbf{t}}\epsilon_{\mathbf{t}}') = \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_\delta^2 & \sigma_{\delta,\nu} \\ \sigma_{\delta,\nu} & \sigma_\nu^2 \end{bmatrix}; \quad E(\epsilon_{\mathbf{t}}\epsilon_{\mathbf{t-j}}') = \mathbf{0}.$$

El proceso VAR(1)

- Conocemos el proceso univariado AR(1): $x_t = \phi x_{t-1} + \epsilon_t$.
- Ahora estudiamos su versión multivariada, el VAR(1). Consideren el siguiente proceso VAR(1) bivariado:

$$\mathbf{x_t} = \mathbf{\Phi x_{t-1}} + \epsilon_{\mathbf{t}},$$

$$\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{yy} & \phi_{yz} \\ \phi_{zy} & \phi_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_t \\ \nu_t \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_{yy} y_{t-1} + \phi_{yz} z_{t-1} + \delta_t \\ z_t &= \phi_{zy} y_{t-1} + \phi_{zz} z_{t-1} + \nu_t \end{aligned}$$

- Valores rezagados de ambas variables aparecen en ambas ecuaciones.
- Ejemplo: VAR con PIB y tasa de política monetaria (TPM). Podría capturar: si la TPM es baja este periodo, el PIB sería más alto el próximo periodo; y/o si el PIB es alto este periodo, va a tender a ser algo el siguiente periodo.

Expresión de un VAR(p) como un VAR(1) (1/3)

- La especificación VAR(1) facilita el cálculo de pronósticos, varianzas del error de pronóstico (y otras cosas), porque se pueden obtener de manera recursiva.
- Cualquier proceso ARMA or VAR se puede expresar como un VAR(1).
- Por ejemplo, consideren el siguiente proceso ARMA(2,1):

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}.$$

- Es equivalente a:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \epsilon_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \theta_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \epsilon_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \epsilon_t,$$

$$\mathbf{x_t} = \mathbf{A x_{t-1}} + \mathbf{C w_t}$$

Expresión de un VAR(p) como un VAR(1) (2/3)

- Consideren un VAR bivariado de orden arbitrario p:

$$
\begin{aligned}
y_t = & \quad \phi_{yy1} y_{t-1} + \phi_{yy2} y_{t-2} + \ldots + \phi_{yz1} z_{t-1} + \phi_{yz2} y_{t-2} + \ldots + \epsilon_{yt} \\
z_t = & \quad \phi_{zy1} y_{t-1} + \phi_{zy2} y_{t-2} + \ldots + \phi_{zz1} z_{t-1} + \phi_{zz2} y_{t-2} + \ldots + \epsilon_{zt}
\end{aligned}
$$

- Puede expresarse como un VAR(1) en el vector $\mathbf{x_t} = [y_t \ z_t \ y_{t-1} \ z_{t-1} \ \cdots]'$:

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} y_t \\ z_t \\ y_{t-1} \\ z_{t-1} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{(2p \times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{yy1} & \phi_{yz1} & \phi_{yy2} & \phi_{yz2} & \cdots \\ \phi_{zy1} & \phi_{zz1} & \phi_{zy2} & \phi_{zz2} & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_{(2p \times 2p)} \underbrace{\begin{bmatrix} y_{t-1} \\ z_{t-1} \\ y_{t-2} \\ z_{t-2} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{(2p \times 1)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{(2p \times 2)} \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_{yt} \\ \epsilon_{zt} \end{bmatrix}}_{(2p \times 1)} \text{, or}
$$

$$
\mathbf{x_t} = \mathbf{A} \mathbf{x_{t-1}} + \mathbf{C} \epsilon_{\mathbf{t}}, \quad E(\epsilon_{\mathbf{t}} \epsilon_{\mathbf{t}}') = \mathbf{\Sigma}
$$

Expresión de un VAR(p) como un VAR(1) (3/3)

- Expresamos un VAR bivariado de orden arbitrario p como un VAR(1). Los elementos de vectores y matrices en esta representación son escalares.
- Se puede obtener un VAR(1) equivalente, en el que los elementos de vectores y matrices de la representación también son vectores y matrices:

$$\mathbf{x_t} = \mathbf{\Phi_1 x_{t-1}} + \mathbf{\Phi_2 x_{t-2}} + ... + \mathbf{\Phi_p x_{t-p}} + \epsilon_\mathbf{t}$$

- We would map this into a VAR(1) as follows:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x_t} \\ \mathbf{x_{t-1}} \\ \mathbf{x_{t-2}} \\ \vdots \\ \mathbf{x_{t-p+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi_1} & \mathbf{\Phi_2} & \mathbf{\Phi_3} & \cdots & \mathbf{\Phi_p} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x_{t-1}} \\ \mathbf{x_{t-2}} \\ \mathbf{x_{t-3}} \\ \vdots \\ \mathbf{x_{t-p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_\mathbf{t} \end{bmatrix}$$

Pronósticos de un VAR(1) (1/2)

- Sabemos cómo calcular pronósticos de un proceso escalar AR(1). Para un VAR(1) $\mathbf{x_t} = \mathbf{A}\mathbf{x_{t-1}} + \mathbf{C}\epsilon_\mathbf{t}$, el proceso es análogo:

$$E_t(\mathbf{x_{t+k}}) = \mathbf{A}^k\mathbf{x_t}.$$

- La varianza del error de pronóstico:

$$\mathbf{x_{t+1}} - E_t(\mathbf{x_{t+1}}) = \mathbf{A}\mathbf{x_t} + \mathbf{C}\epsilon_\mathbf{t+1} - \mathbf{A}\mathbf{x_t} = \mathbf{C}\epsilon_\mathbf{t+1}$$

$$\Rightarrow var_t[\mathbf{x_{t+1}} - E_t(\mathbf{x_{t+1}})] = var_t(\mathbf{x_{t+1}}) = var_t(\mathbf{C}\epsilon_\mathbf{t+1}) = \mathbf{C\Sigma C}'$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x_{t+2}} - E_t(\mathbf{x_{t+2}}) &= \mathbf{A}\mathbf{x_{t+1}} + \mathbf{C}\epsilon_\mathbf{t+2} - \mathbf{A}^2\mathbf{x_t} \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x_t} + \mathbf{C}\epsilon_\mathbf{t+1}) + \mathbf{C}\epsilon_\mathbf{t+2} - \mathbf{A}^2\mathbf{x_t} = \mathbf{C}\epsilon_\mathbf{t+2} + \mathbf{AC}\epsilon_\mathbf{t+1}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow var_t[\mathbf{x_{t+2}} - E_t(\mathbf{x_{t+2}})] = var_t(\mathbf{x_{t+2}}) = \mathbf{C\Sigma C}' + \mathbf{AC\Sigma C}'\mathbf{A}'$$

$$var_t(\mathbf{x_{t+k}}) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A^j C\Sigma C}'\mathbf{A^{j}}'$$

Pronósticos de un VAR(1) (2/2)

- Estas fórmulas para pronósticos y errores de varianza de pronósticos pueden expresarse de manera recursiva:

$$\boxed{E_t(\mathbf{x_{t+k}}) = \mathbf{A} E_t(\mathbf{x_{t+k-1}}), \text{ porque}}$$

$$\begin{aligned}
E_t(\mathbf{x_{t+k}}) &= \mathbf{A^k x_t} \\
E_t(\mathbf{x_{t+k-1}}) &= \mathbf{A^{k-1} x_t}, \text{ por lo tanto:} \\
E_t(\mathbf{x_{t+k}}) &= \mathbf{A A^{k-1} x_t} = \mathbf{A} E_t(\mathbf{x_{t+k-1}})
\end{aligned}$$

$$\boxed{var_t(\mathbf{x_{t+k}}) = \mathbf{C \Sigma C'} + \mathbf{A} var_t(\mathbf{x_{t+k-1}}) \mathbf{A'}}$$

$$\begin{aligned}
var_t(\mathbf{x_{t+2}}) &= \mathbf{C \Sigma C'} + \mathbf{A C \Sigma C' A'} \\
var_t(\mathbf{x_{t+1}}) &= \mathbf{C \Sigma C'}, \text{ por lo tanto:} \\
var_t(\mathbf{x_{t+2}}) &= \mathbf{C \Sigma C'} + \mathbf{A} var_t(\mathbf{x_{t+1}}) \mathbf{A'}
\end{aligned}$$

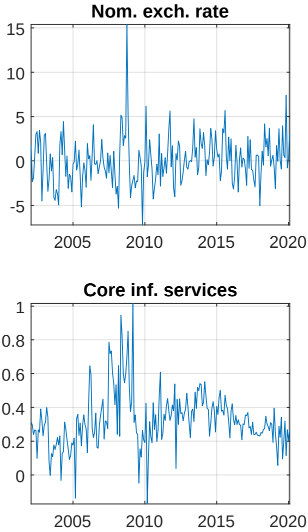
Aplicación: Pronósticos de la inflación (1/6)

- Sabemos que la inflación está relacionada con el tipo de cambio nominal.
- Pronosticamos la inflación con un modelo VAR que incluye ambas variables.
- Comparamos los pronósticos del modelo VAR con los que provienen de un modelo autoregresivo univariado.
- Usamos datos mensuales del tipo de cambio nominal (pesos por dólar) y de la inflación sin alimentos y energía (subyacente).
- Además, la inflación SAE se desagrega en inflación SAE de bienes, e inflación SAE de servicios.
- La muestra cubre el periodo 2002:M2–2020:M2.
- Todos los datos se expresan como diferencias logarítmicas multiplicadas por cien, por lo que se aproximan a variaciones porcentuales mensuales.

Aplicación: Pronósticos de la inflación (2/6)

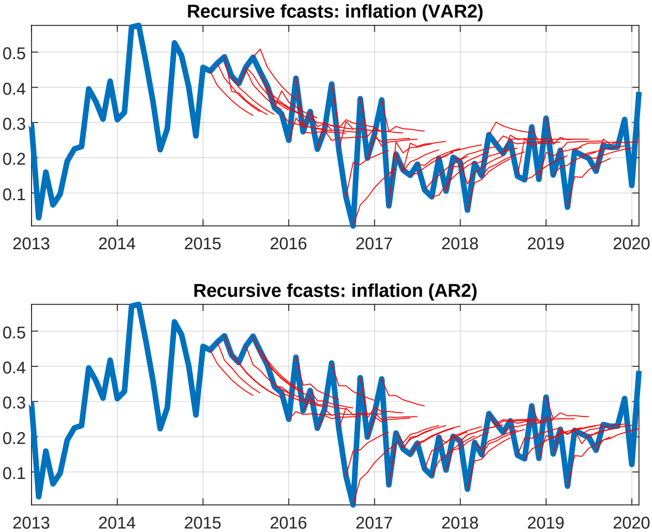
- Para cada medida de inflación (SAE, SAE bienes y SAE servicios), usamos un modelo VAR(2) que además incluye al tipo de cambio nominal; y un modelo AR(2).
- Hacemos un análisis de desempeño predictivo fuera de muestra, que consiste en pronósticos recursivos:
  - Estimamos los modelos para la muestra 2002:M2–2015:M2 y pronosticamos los próximos 6 meses. Guardamos los pronósticos.
  - Agregamos un dato y repetimos el paso anterior: estimamos los modelos para la muestra 2002:M2–2015:M3, pronosticamos 6 meses y guardamos los pronósticos.
  - Repetimos el paso anterior hasta la muestra 2002:M2–2019:M8, por lo que tenemos un conjunto de 55 pronósticos recursivos a un horizonte de 6 meses.
- Resultado: el modelo VAR(2) tiene un mejor desempeño predictivo que el modelo AR(2) para el caso de la inflación SAE bienes, pero no para la inflación SAE servicios. ¿Intuición?

Figure: Datos para el análisis



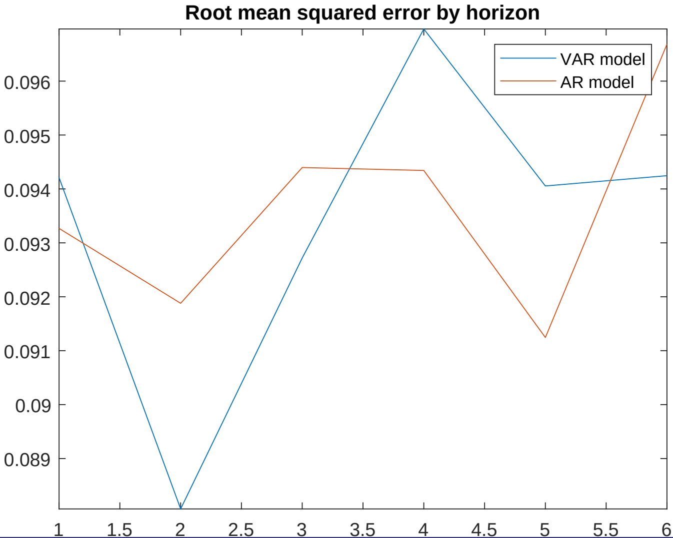
Aplicación: Pronósticos de la inflación (4/6)

Figure: Pronósticos recursivos: inflación SAE



Aplicación: Pronósticos de la inflación (5/6)

Figure: Raíz del error cuadrático medio por horizonte proy.: inflación SAE



Aplicación: Pronósticos de la inflación (6/6)

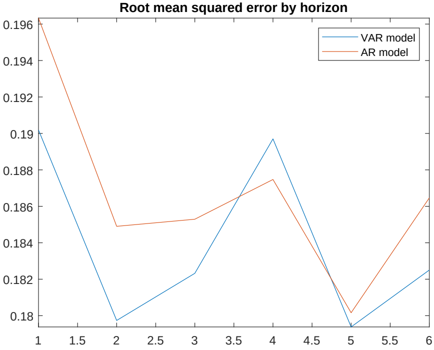


Figure: RMSE: inflación SAE bienes

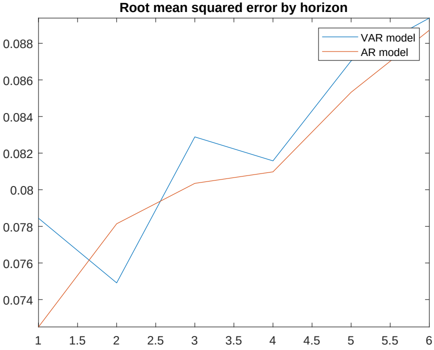


Figure: RMSE: inflación SAE servicios